

SSE-DP-2026-4

## S-SIML 季節調整

佐藤整尚・国友直人

東京大学経済学部・統計数理研究所

2026年4月

SSE-DP(ディスカッションペーパー・シリーズ)は以下のサイトから無料で入手可能です。

<https://stat-expert.ism.ac.jp/training/discussionpaper/>

このディスカッション・ペーパーは、関係者の討論に資するための未定稿の段階にある草稿である。著者の承諾なしに引用・複写することは差し控えられたい。

**SSE-DP-2026-4**

**S-SIML Seasonal Adjustment Program**

by

**Seisho Sato and Naoto Kunitomo**

**The University of Tokyo • The Institute of Statistical Mathematics**

**April 2026**

**(Summary)**

We explain a new seasonal adjustment program called SarSIML (or S-SIML). It is based on the (real-valued) spectral decomposition of non-stationary time series, which is an application of the SIML filtering method developed by Kunitomo and Sato (“The SIML Filtering Method for Noisy Non-stationary Economic Time Series,” 2025, JSS-Springer Series, Springer).

# S-SIML 季節調整\*

佐藤整尚<sup>†</sup>

国友直人<sup>‡</sup>

2026年4月

## 概要 (Summary)

非定常経済時系列における季節性を処理する新たな季節調整法として SarSIML (or 略して S-SIML) を解説する。この方法は非定常時系列の  $K_n^*$  変換 (階差変換+実 cosin フーリエ変換) と逆変換に基づく SIML 平滑化法を利用している。変化点を考慮しつつ周波数と周期による直観的な季節性の理解と実務的な季節調整が可能となる。なお SIML 平滑化 (smoothing) については次の文献で解説している。Kunitomo and Sato (2025), "The SIML Filtering Method for Noisy Non-stationary Economic Time Series," JSS-Springer Series, Springer.

## 鍵言葉 (Key Words)

非定常経済時系列, トレンド・サイクル・季節性・不規則変動・変化点, sarsiml, SIML 平滑化, 周期と周波数, 季節調整, マルチンゲール性, 階差・実 cosin 変換と  $K_n^*$  変換, スペクトル分解,

## 1 はじめに

時間の経過とともに多数の経済時系列が観察されている。特に主要な公的経済時系列データの場合にはそれぞれの統計調査によるデータの収集上・作成上の理由か

---

\*Version2026-4-4. この論文は Discussion Paper SSE-DP-2025-1.pdf の一部の原稿の改訂稿である。(https://stat-expert.ism.ac.jp/wp/wp-content/uploads/2025/01/SSE-DP-2025-1.pdf, 統計数理研究所, The Institute of Statistical Mathematics (ISM), Tokyo, Japan.) 研究は「統計エキスパート人材育成事業」(Consortium for training experts in statistical sciences, ISM) の一環として行われたが, JSPS Grant22K01428 の支援も受けた。

<sup>†</sup>東京大学経済学部

<sup>‡</sup>統計数理研究所

ら日々の系列、月次系列、四半期系列、年次系列など様々な頻度や異なる時間的タイミングで計測され、政府の各部署から公表されている。消費・投資・政府支出・輸出入など主要な経済時系列の各系列はそれぞれ基礎となる統計調査にもとづき系列が作成されることに伴う事情からそれぞれの特徴があり、事前に相互に調整されて公表されているわけではない。

しかし、経済の動向を理解し、データ分析を行った上で政策判断を行うなどという利用の目的からはこうしたデータの作成・公表を巡る事情は望ましいものとはいえない。特に経済全体の動向を示す公的時系列系列の場合には、直近の経済の状況を理解するため、なるべく早めに正確なデータを作成し、公表することが望ましいが、国全体のデータを作成するには基礎となる多くの調査データを収集する必要がある。例えば日本のGDP統計の主要な項目はその基礎となる一次統計が各調査結果の収集上の理由から、時間差をともないそれぞれ公表されることから、一次速報に続き、二次速報、確報と改訂される。そうしたプロセスの具体的な例としてGDP統計における投資系列をとりあげてみよう。基礎データは比較的迅速に得られる小規模な調査データに基づき内閣府社会経済研究所がGDP一次速報を公表した後に、より大規模な調査（財務省による法人企業統計）に基づくより正確と思われる基礎データが利用可能となるので、その結果、しばらく後に四半期系列の一次公表値が改訂される。こうした公的データの調査の事情により改訂するときに生じる誤差は統計科学の観点からは真の状態変数の推定の過程で生じる観測誤差と考えられるが、公表される四半期データが直近で得られる月次系列など基礎データの情報と見かけ上で矛盾する事例なども散見される。また日本の公的統計では各系列を調査する担当部署が分散しているので、公表する責任や時期がそれぞれ異なっていることも問題をより複雑にしている。

さらに日本を含む多くの国の公的時系列データでは公表値の作成に移動平均に基づく季節調整法 X-12-ARIMA, X-13ARIMA-SEATS が利用されているが、これらの季節調整プログラムでは Reg-ARIMA モデルという一変量時系列回帰モデルを内部の計算では利用している<sup>1</sup>。日本の中央官庁では実務的には公表されている各系列に対して担当部局、系列の担当者が別個に Reg-ARIMA モデルを適用、運用している。したがって、経済時系列の場合には時系列間には様々な関係があり、異なる構成要素が混在する時系列の成分分解が必要であるにもかかわらず、複数の時系列が整合的に季節調整が行われているわけではない。他方、テレビニュース・新聞・ネットなどのメディアにより報道される経済時系列は季節調整済系列が少なくなく、報道される数値の信憑性についての議論は活発とは云えない。

本稿ではこうした公的統計における経済時系列の扱いを踏まえつつも、季節性やノイズを持つ非定常経済時系列を扱うという統計的時系列分析の立場より整合的に

---

<sup>1</sup>X-11,X-12 - ARIMA, X-13ARIMA-SEATS など公的統計でよく利用されている季節調整法については高岡 (2015) が説明している。

季節調整の問題を考察し、周期や季節周波数と云った直観的にも理解しやすい季節性の概念に基づいた新たな統計的アプローチを提唱する。特に我々はSIML平滑化アプローチに基づく季節調整の方法を開発したので、RプログラムによるSarSIMLプログラム（通称S-SIML季節調整）の利用法を実例を含めて説明する。SIML平滑化法はKunitomo and Sato (2021, 2025)などで展開された非定常時系列の統計的分析法である。この方法では経済時系列ではよく観察されるトレンド・循環成分、季節成分、不規則成分、さらに変化点などを非定常時系列と定常時系列の混合としてとらえ、階差変換と実cosinフーリエ変換を組み合わせた $K_n^*$ 変換をほどこし、時系列のスペクトル分解と逆変換を利用して復元して状態推定を行う、という考えに基づいている。このSIML平滑化法はKunitomo and Sato (2021, 2025)により説明しているが、既に国友・櫻井・佐藤 (2022), 櫻井 (2026)がSIML法を応用として利用している。SIML法を利用すると、周波数分解を通じて非定常性、マルチンゲール性、季節性などを合わせ持つ四半期系列や月時系列から直接的にトレンド・循環成分、季節成分、変化点成分などの推定を求め、季節調整系列を構成できることを示す。したがって、変化点や税制の変更などを考慮しつつ周波数と周期による直観的な季節性の理解と実務的な季節調整が可能である。

以下では2節でS-SIML季節調整の方法を具体的に説明、3節で二つの実例を示す。4節では経済時系列を巡る非定常性・初期値問題・変化点問題に言及する。さらに季節調整を巡る幾つかの論点について5節で言及する。S-SIML法の数理的基礎となる非定常時系列のSIML分解についての概略を補論で説明する。

## 2 S-SIML季節調整プログラムの利用法

季節調整のためのRプログラムsarsiml（通称はS-SIML）の利用法を説明する。フリーソフトR上でどこでも実行可能であるが、佐藤 (2023)が開発したより広範な機能を持つ季節性と非定常性を持つ時系列データを分析するSIML法に基づくRプログラムのx12simlの簡易版である<sup>2</sup>。

(i) Rが起動する場所（例えばR上で`setwd("C:/R")`などとする）にsarsimlのプログラム・ファイルを置いてR上で

```
source("sarsiml_ver1.1.R")
```

とするとインストール完了となる。

(あるいはテキスト形式のRソースファイルを直接に読み込んでも良い。)

(ii) データはRコマンドにしたがいデータファイルを読み込むことで利用可能となる。通常は`setwd("C:/Sato")`などにより作業ディレクトリーをC上に設定し実行する。あるいはプログラムをcopy, pasteを利用、エクセル・ファイルならcopyコ

---

<sup>2</sup><https://github.com/sato-labo/x12siml>

マンドから

```
data=read.delim("clipboard")
```

を利用して直接にデータを読み込んでも良い。

(iii) 次に四半期データなら

```
sarsiml(quarterlydataname, start=c(1994,1), frequency=4)
```

月次データなら

```
sarsiml(monthlydataname, start=c(2002,1), frequency=12)
```

と打ち込むと計算を実行、結果と図が表示される。

(iv) トレンド・循環パラメータは次節の実例のように四半期データ ( $n=100$ ) の場合には約3年、月次データ ( $n=216$ ) の場合には約2年に設定されているが、次の説明にしたがってパラメータ `trend` (あるいは `m` を) 設定することが可能である<sup>3</sup>。sarsiml プログラムはデフォルトでは次節で例示されるように経験上で有用と考えられる四半期  $m \sim n/6$ , 月次  $m \sim n/12$  に設定されている。

ここで SIML 平滑化では周波数 (frequency) は  $\lambda \in [0, \frac{1}{2}]$  にとっていることに注意しよう。例えばトレンド・循環成分の推定では離散時間で得られる観測値から  $\lambda_k = (k - \frac{1}{2})/(2n + 1)$  ( $k = 1, \dots, m$ ) に対応して変換 ( $K_n^*$  変換と呼ぶ) したデータ ( $Z$  変換値と呼ぶ) を利用するが、 $k = m + 1, \dots, n$  に対応するデータは除かれる。例えば30年の四半期データ ( $n = 120$ ) 場合、1年周期は  $\lambda = 1/4 = 0.25$ 、10年の月次データ ( $n = 120$ ) の場合、1年周期は  $\lambda = 1/12 \sim 0.083$  に現われる。したがってある  $\lambda_m$  に対する  $m$  を設定すると  $\lambda_m$  より周波数が大きい (すなわち周期がより短い) 成分は削除され、トレンド・循環成分が推定される。すなわちトレンド・循環成分について最小の周期 (あるいは最大の周波数) を指定することにより推定することが可能である。

トレンド・循環要素の推定は観測される低周波数 (長い周期) のみに対応する  $Z$  変換から逆変換によって得られる。次節の実例で例示、その詳細は補論で説明するが変換  $K_n^*$  により得られる  $Z$  変換値は周波数  $[0, \frac{1}{2}]$  に対応している。変換の理論および計算方法の基礎事項は補論、あるいは Kunitomo and Sato (2025) を参考にされたい。

(v) 季節要素の推定は観測される季節周期の周りの周波数のみに対応する  $Z$  変換値から求められる逆変換値により行われる。離散時系列として観察されるデータ上では厳密な季節周期ではなく季節周期の周りに揺らぎをもって観測されると解釈する。季節ゆらぎパラメータはデフォルト選択では次節の実例のように月次 ( $n=216$ ) では `sorder=2`, 四半期 ( $n=100$ ) では `sorder=3` に設定されている。季節成分の推定において `sorder=1` と設定すると周波数  $\lambda = 1/2$  を除き各季節周期  $\lambda_s$  に対しバンド幅  $[\lambda_s - 1/(2n), \lambda_s + 1/(2n)]$  から3個、周波数  $\lambda = 1/2$  に対してはバンド幅  $[1/2 - 1/n, 1/2]$

<sup>3</sup>詳細については佐藤 (2023) の x12siml マニュアルを参照されたい。

より2個の周波数を除くように計算される。なお  $n$  はデータ数である。

トレンド・循環成分、季節成分、不規則成分を持つ非定常経済時系列には様々な側面が存在するので柔軟に対処することが望まれる。例えば

```
sarsiml(monthlydataname, start=c(2002,1), frequency=12, trend=10,sorder=1)
```

とすれば  $m = 10, sorder = 1$  に設定することが可能となる。トレンド・循環成分や季節性が変化している場合などの対処は `trend, sorder` による調整は可能である。また時系列によってはデフォルト設定では季節性が十分にとれない場合がありうる。そのときには `sorder` で対処するか、オプション

```
smooth=T
```

を利用することもできる。このコマンドは周波数  $\lambda = 1/2$  周辺の季節成分を幅広くとり、 $1/2$  からその前の季節成分 (四半期データでは  $1/4$ , 月次データでは  $5/12$ ) までの周波数成分を取り除くことを意味している。なお季節性が明らかに存在しない場合には、`sorder=0` を指定すると、季節成分を推定しないこともオプションとしては可能である<sup>4</sup>。

なおZ変換を利用すると、次節の実例で見られるように多くの場合には四半期データでは季節変動は周波数  $\lambda = 1/4, 1/2$ , 月次データでは  $\lambda = 1/12, 2/12, 3/12, 4/12, 5/12, 6/12$  の周辺に現われることが分る。

(vi) 平滑化の推定結果は

```
res = sarsiml(shouhi)
```

としてから

```
res$trend
```

```
res$adj
```

```
res$Z
```

```
res$seasonal
```

```
res$noise
```

とすれば取り出して再利用することができる。

(vii) このプログラムでは時系列データの期首周辺と期末周辺において安定的な季節性の推定値を得るためにデフォルトでは  $p_a = 2, p_b = 2$  と設定している。実務の季節調整では利用できる観測されるデータの期間の末端の季節性を推定する必要があるが、経験的にはかなり難しい問題である。 $p_a, p_b$  は X-12-ARIMA における ARIMA モデルを用いた予測系列の作成に対応するが、特に統計モデルの設定・推定などは行わずに、 $p_a = 1, p_b = 1$  はそれぞれ期首の1周期と期末の1周期のデータを利用して1周期データをそれぞれ利用して外挿により得られる一種の予測モデルを利用している。デフォルト選択での予測期間は2周期である。このデフォルト設定を変更して例えば  $p_a = p_b = 0$  (すなわち外挿データは利用しない) とすることは可能であ

---

<sup>4</sup>実際に遭遇した経験的な実例としては GDP の構成項目の投資系列の基礎調査系列である機械受注統計などが挙げられる。

るが、こうすると経験的には季節性が強く観測される経済時系列において S-SIML 季節調整では期首付近や期末付近で季節性を安定的に推定することができないことが多い。事前情報があれば  $p_a, p_b$  の設定により季節性の安定性について何らかの情報を取り入れることが可能である。

(viii) 次節の実例のように図の中で示されている 2 つの AIC は状態変数と観測誤差・季節変動のノイズが i.i.d. ガウス分布にもとづくとして仮定して計算した近似的な尤度関数から求めた疑似 AIC である。データ数  $n$  に基づく AIC とトレンド・循環成分のデータ数  $m$  に基づく AIC が計算される<sup>5</sup>。これは元々は操作変数を利用するプログラム x12siml における周波数残差から変換して計算される AIC であるが、季節性を推定し除いたフィルタリングのデータへのフィットの良さを示す一つの指標である。計算のアルゴリズムは原データを  $K_n^*$ -変換して得られた Z 変換値<sup>6</sup> を利用して  $AIC = -2 \log(\text{尤度関数}) + 2(\text{パラメーターの数})$  により求められる。

AIC の最小化により回帰変数の選択が可能になるが、トレンド・循環部分の回帰と不規則変動部分の回帰の推定では二通りの推定を行っている<sup>7</sup>。すなわち、次節の図で示しているように季節要素および回帰変数により説明される要素を除いてトレンド・周期成分に対応するデータ集合  $I_m$  から  $(1/m) \sum_{t \in I_m} z_t^2$  を分散の推定値を作成する方法<sup>8</sup>、季節要素および回帰変数により説明される要素を除いて対応するすべてのデータ集合  $I_n$  から  $(1/n) \sum_{t \in I_n} z_t^2$  を分散の推定値を作成する方法がありうる。二つの方法に基づいて尤度関数の評価を (データ数)  $\times \log[(\text{分散の推定値})]$ <sup>9</sup> を用いて計算している。ここでは一種の赤池の FPE(Final Prediction Error) と云う意味での AIC と解釈している。

### 3 実例

ここで四半期の実質最終消費系列 (1994-2000, 内閣府) の分析結果を例としてまとめて図 1 に示しておく。GDP 統計における最終消費支出は幾つかの一次統計から二次統計として推計されるが、日本経済の動向を示す最も重要な公的統計の一つである。図 1 の中の各図を説明しておく、左側の上図は実線が原系列、赤線がトレンド・循環成分、左側の中央は推定されたノイズ成分をそれぞれ示している。右側の右上図は時系列から推定された季節成分、右側の中央図は原系列と季節調整系列を示している。通常は季節調整値は (原系列)-(季節成分) により推定されるのでノイズ

<sup>5</sup>補論で示すように一般の確率過程についても理論的には計算可能であるが観測データからスペクトル密度を推定する必要がある。

<sup>6</sup>データの  $K_n^*$  変換と Z 変換地については補論を参照されたい。

<sup>7</sup>詳しくは佐藤 (2023), あるいは補論の議論を参考にされたい。

<sup>8</sup>状態変数  $\Delta x_i$  の分散推定の正当性については Kunitomo and Sato (2021, 2025) を参照されたい。

<sup>9</sup>分散推定の過程でデータを削減した場合には尤度関数の復元ではデータ数は比較の意味で  $m$  ではなく  $n$  に基準化していることに注意しておく。

成分も含まれている。右側の下図の  $Z$  は原系列の差分系列を  $\cosin$  変換して作成した系列を示している。顕著な季節性をもつ四半期データでは季節性をに対応する周波数  $0.25, 0.5$  の付近で大きく変動を示す。

最終消費系列は経済の成長に伴い上昇トレンドやある種の循環変動が観察される。また日本では 2000 年代に入り、東日本大震災、リーマンショックなどマクロ的には大きな変動があるが、これらは (原系列) から (推定された季節性) を引いて推定された不規則変動に含まれる。したがって最終的には原系列から季節要素を引いて作成された季節調整系列の変動と見なされることになる。

なおセンサス X-12-ARIMA、X-13ARIMA-SEATS などの季節調査とは異なり、S-SIML は季節性を原系列の階差系列の周波数成分から直接に推定するので (季節調整系列) を求めるために Reg-ARIMA モデルなどは必要ない。また左側の下図は  $K_n^*$ -変換で求めた  $Z$  系列 (補論を参照) であるが季節性のある四半期マクロ時系列では四半期観測から周波数成分  $\lambda = 0.25, 0.5$  の周辺にのみ季節性があらわれる。また経済時系列ではマルチンゲール性を持つ場合が少なくないと考えられるが、原系列の単なる実フーリエ変換ではなく  $K_n^*$  変換を用いた  $Z$  系列を観察することでこうした季節性のデータ上での現れ方がより深く理解できる。

月次データの例として国友・櫻井・佐藤 (2022) でとりあげた家計調査による消費データ (2002~2019) の季節性の分析結果を示しておく。家計調査は総務省統計局が毎月実施している約 9,000 世帯についての調査の結果をまとめた一次統計であるが、近年では世帯構成の変化に伴い、僅かではあるが下方トレンドが存在している。月次データは経済動向を示す指標として四半期データよりも速報性があるので重要な統計となっている。家計調査の時系列を四半期データと同様にして原系列、季節成分、不規則成分、季節調整値を図 2 にまとめて掲載した。こうした月次データの場合には周波数における  $K_n^*$ -変換により求められた直交成分  $Z$  は季節成分に対応する周波数  $\lambda = 1/12, 2/12, 3/12, 4/12, 5/12, 6/12$  周辺に効果があらわれていることが確認される。このように月次の経済時系列では離散時系列として観察されるデータからはこれらの周波数に対応する波が複合的に季節成分がとして現われている。 $K_n^*$  変換を用いて  $Z$  系列を観察することで時系列データから季節性をよりよく理解できる。なお月次消費データではトレンド・循環・季節要素・不規則変動、などに加えて消費税導入の影響などの制度変更や経済環境の偏かなども無視できないが、ここでは議論を省略するが、その分析は国友・櫻井・佐藤 (2022) など他に譲る。

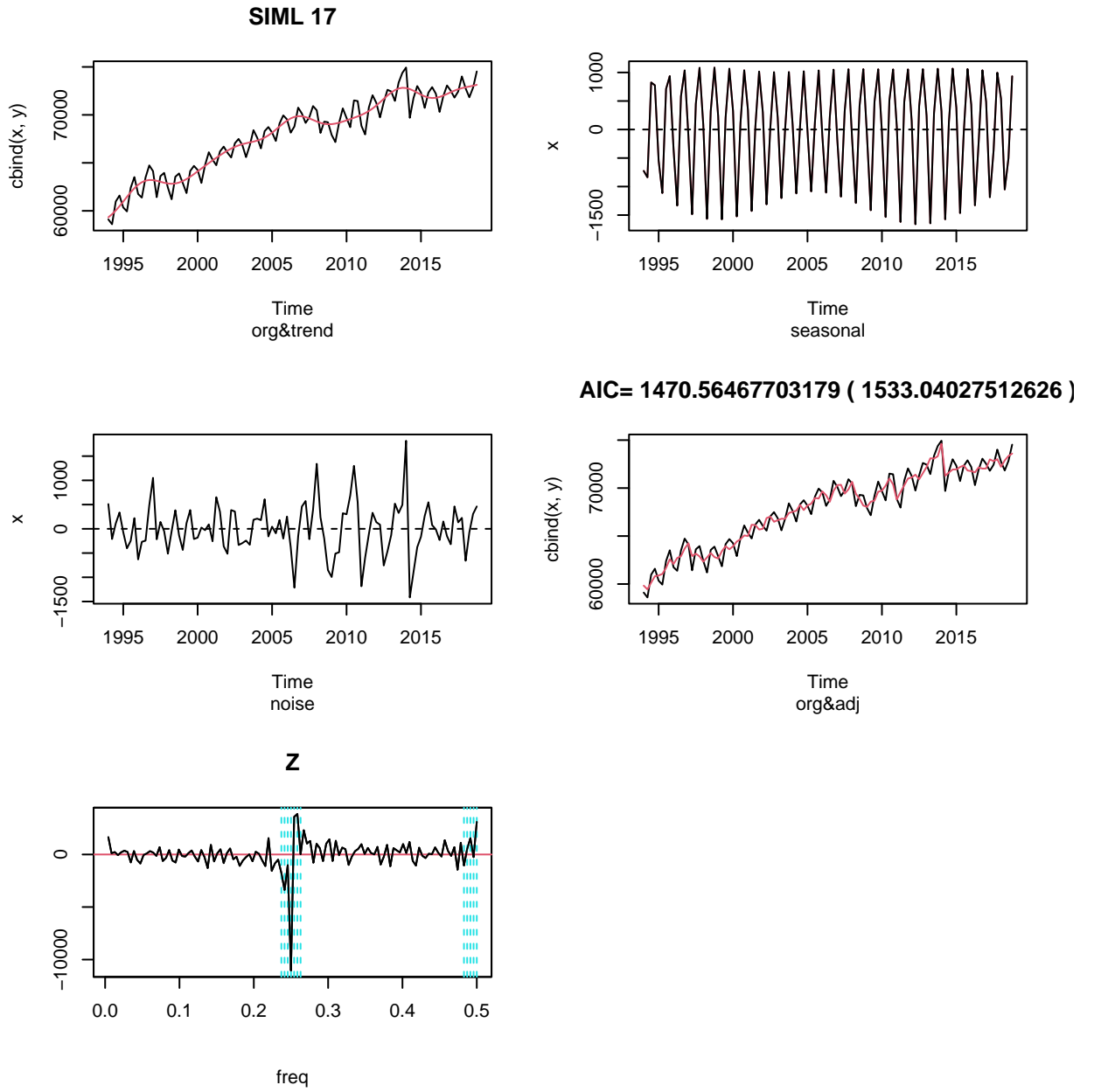


圖 1: S-SIML 季節調整 (實質消費)

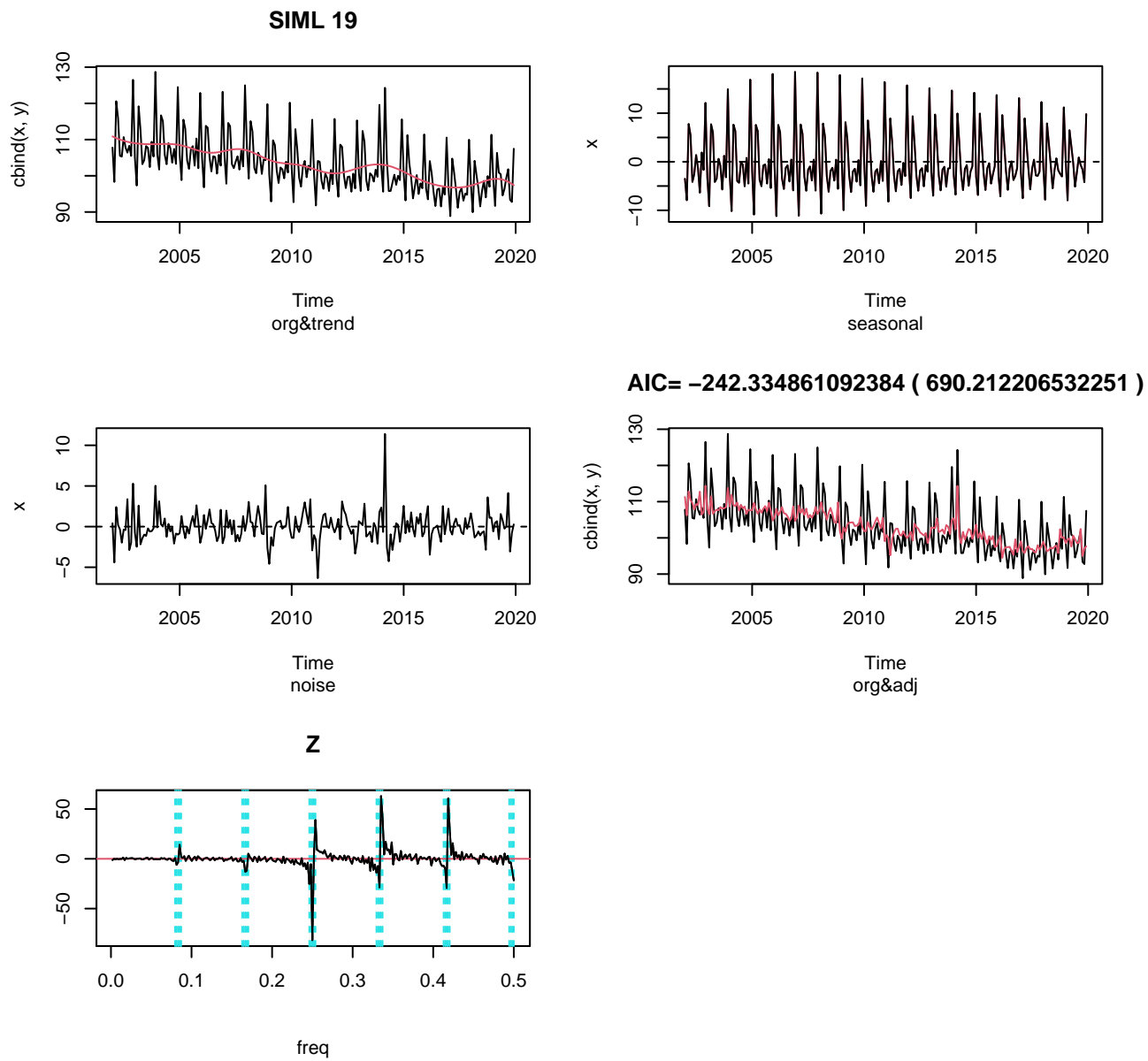


图 2: S-SIML 季節調整 (家計消費)

## 4 SarSIML の発展的利用

ここでは S-SIML 季節調整プログラムにより利用可能である二つの重要な事項のみに言及する。既存の季節調整プログラムではいずれもアドホックに対応しているように思われるが、いずれの問題に対する S-SIML の利用法について詳しくは佐藤 (2023) を参照されたい。

第一の問題は非定常時系列データの分析では初期値の扱いが重要な鍵になりうることである。例えば時系列がランダムウォークの実現系列なら時系列が非定常となり初期値の影響は永続するので i.i.d. の場合や定常過程にもとづくデータ分析では不適切な処理を行う可能性がある。状態変数の統計的フィルタリングや平滑化の推定は初期値に大きく依存することがありうる。この問題に対処する為に forward-smoothing(前向き平滑化) と backward-smoothing(後ろ向き平滑化) が開発されている。ここで backward-smoothing とは観測データ  $\mathbf{y}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) の最初<sup>10</sup> のデータ  $\mathbf{y}_1$  ではなく最新のデータ  $\mathbf{y}_n$  を初期値にとり平滑化する方法である。例えば非定常時系列におけるデータの端点、初期値の影響や直近で大きな変動が生じる場合の分析に役に立つ。さらに backward-smoothing や繰り返して smoothing を行う方法の理論と変化点分析への応用例は Sato and Kunitomo (2026) が詳しく説明している。初期値問題が気にならない場合にはデフォルト設定は forward 平滑化であるが、x12siml では `mtype=2` とすることで backward 平滑化を実現できる。詳しくは佐藤 (2023) を参照されたい。

第二の問題は非定常経済時系列ではしばしば突然の大きな変化（近年の例としては 2008 年に発生したリーマンショック、2020 年に発生した COVID-19 など）が観察されることである。その他、制度的変更（日本では例えば消費税の導入による消費行動の変化など）などの影響も無視できないことがある。季節調整を行うにあたって、こうした変化点の分析にはダミー変数回帰の他に、異常値探索 outlier などを用意している。

**応用例**： 補論の最後で説明するランプ・ダミー (rp) と呼ばれるダミー変数を利用した応用例を示しておく。ここで利用した時系列データは日本の機械受注統計の 1 系列 (月次, 内閣府社会経済研究所が調査・公表) である。S-SIML プログラムは x12siml プログラムの簡易版であり、プログラム sarsiml (マニュアルである佐藤 (2023) の中の x12siml プログラムは sarsiml プログラムの前身、ほぼ同一である) を利用して、ランプ変数 rp(補論のダミー変数の例 3 を参照) を用いて SIML 分解を実行する。まず `sarsiml_ver1.1.R` を読み込み、次に月次データを読み込む。ここではコマンド `zz <- sarsiml(data,start=c(2005,4),frequency=12,trend=18,rp=c(2008,10,2008,12),mtype=1,pb=2,pa=2)`

<sup>10</sup>補論では利用可能データが  $\mathbf{y}_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) である場合 (データ数は  $n+1$ ) を考察している。フィルタリングや平滑化では初期値の扱いに注意する必要がある。

の実行結果として得られる図3を示しておく。この図の中にはダミー変数の影響の推定結果を示す小さな図が右側に一つ追加されている。2008年-2009年にかけて起きたリーマンショックによるトレンド・循環への非線形変動の影響を捉えている。ここでの結果はマニュアルの項目 [12] トレンド・循環・季節性を含む機械受注統計データの分析に対応するが、マニュアルには、さらに変化点探索を

```
zz <- outlier(juch,tt=c(2008,1,2009,10),ilog=T,start=c(2005,4),frequency=12,
trend=18,sorder=3)
```

として実行した結果も示されている。

ここで利用した機械受注統計データは日本の景気判断にとり重要な役割があるが2008年後半に発生したリーマン・ショックの影響が大きく出ていることがわかる。季節性の推定値、したがって季節調整系列はこうした大きな変動の影響をかなり受けるので公的統計では実務的にも無視できないことが知られている。

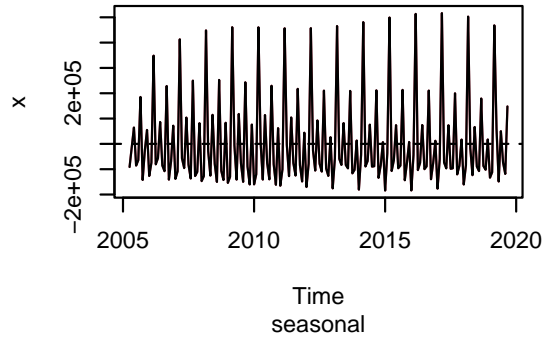
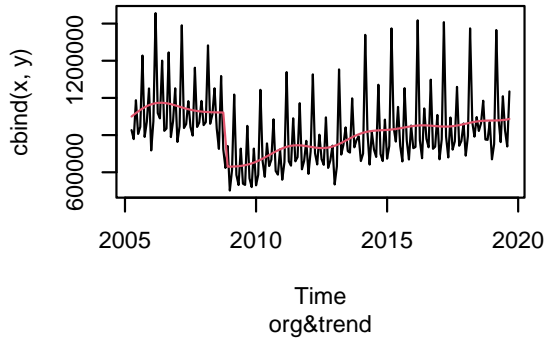
なお幾つかのダミー変数が用意されているが、変化点探索の方法、さらに複数の変化点分析など、通常の方法ではかなり困難な複雑な状況にも S-SIML 法は対処可能である。ここでは一例として図1と同一のデータに対してダミー変数  $rp$  とダミー変数  $vat$ (消費税,  $vat=c(1997,1)$ ,  $vat=c(2014,1)$ ) に設定した<sup>11</sup> sarsiml の推定結果を図4に示しておく。ランプ変数はトレンド・循環変動の一部を説明、消費税ダミー変数はノイズ部分の一時的変動を説明していると考えられる。AIC 最小化の意味では図1よりも結果は改善されている。sarsiml であらかじめ用意されているダミー変数のリスト、係数の有意性などを出力結果を含めより詳しくは佐藤 (2023) を参照されたい。

## 5 幾つかの注意点

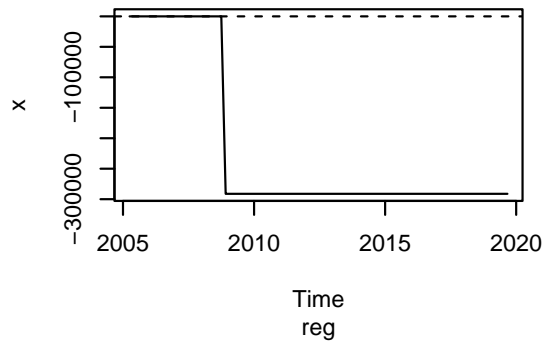
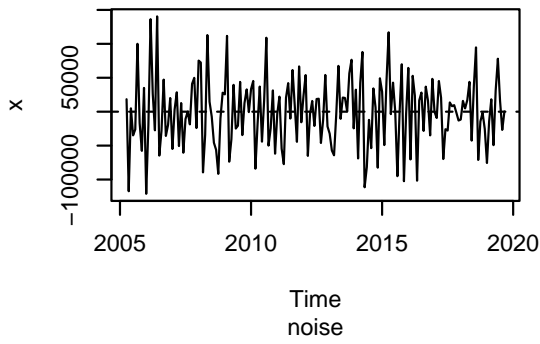
本稿ではノイズや季節性を含む非定常時系列の周波数分解を通じて非定常な四半期系列や月時系列から直接的にトレンド・循環成分、季節成分、季節調整系列を得る方法を説明した。補論で概略を説明しておいたが、より詳しい説明は Kunitomo-Sato (2021), Kunitomo-Sato (2025), 応用例などは国友・櫻井・佐藤 (2022) などに譲るが、周波数分析を利用した季節調整プログラムはこれまであまり見かけないと思われる。しかし「季節性を除去する」と云う意味を考えると周波数分解は自然な発想と考えられる。他方、経済時系列の多くは明らかに非定常成分を含んでいる。特に

<sup>11</sup>消費税ダミーとは日本の消費増税のために作成した駆け込み需要1, 増税効果-1の値をとるダミー変数である。自前でダミー変数を追加することは容易である。

**SIML 18**



**rp:(2008 10 2008 12)**



**AIC= 4270.58759390462 ( 5187.828861385**

**Z**

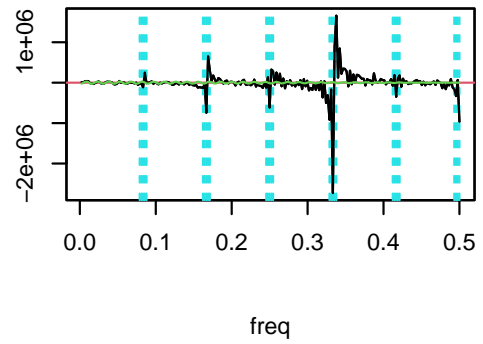
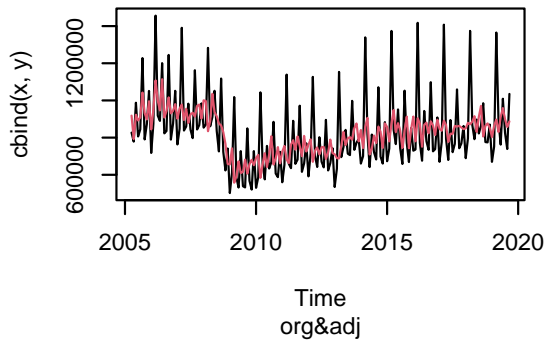


图 3: S-SIML 季节调整 (机械受注系列)

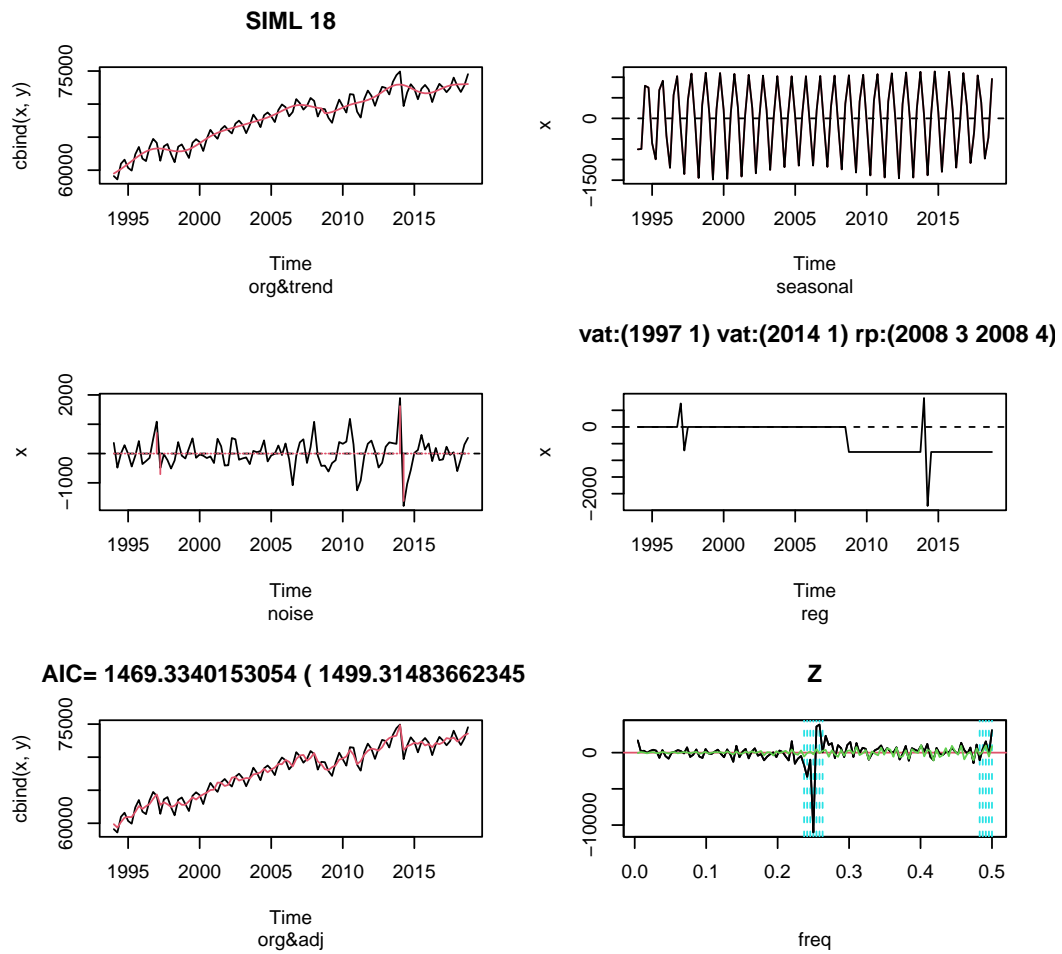


圖 4: S-SIML 季節調整 (實質消費)

金融時系列などの価格時系列にはマルチンゲール性<sup>12</sup>が検出されることがよく知られている。ところがこうした季節性とマルチンゲール性という経済時系列の特性を理解した上で時系列のスペクトル分解はこれまでに統計的時系列分析ではあまり注目を浴びていないと推察される。

ここではS-SIML法を公開する背景の一つとして中国のマクロ経済データについて言及しておく。中国の公的統計では一部の重要なマクロ経済指標について月次データにも関わらず1月の数値を公表せず、1月・2月の合算データを事後的に公表するなどの慣行が長い間行われている。これは中国の統計当局が春節の影響など他の主要な先進諸国と異なる季節的変動を考慮して公表することで公表値が内外に誤解を与えないようにしている、などと解釈することもできる。米国・日本、ヨーロッパ諸国の多くの公的統計ではマクロ経済状況を理解する為に季節調整済系列が作成され、マスメディアにより公表されているが、X-12-ARIMA, X13ARIMA-SEATSという米国センサス局が開発した季節調整プログラムが主に利用されているが、こうした季節調整では暗黙の裡にグレゴリア歴（太陽暦）が利用され、1年の季節性が定義されている。ところが中国では太陰暦などの影響が小さくなく、「季節性とは何か?」という根本的な問題を提起していると思われる。国友編(2025)に収録された論考ではこうした中国の公的時系列における季節性を巡る考察を行っている。またS-SIML法を利用した実務的検討としては櫻井(2026)が日本型の曜日効果・休日効果を詳しく検討している。

既存の季節調整では、公的統計における実用的な季節調整として米国センサス局が開発したX-12-ARIMA, X-13ARIMA-SEATSがよく利用されている<sup>13</sup>。センサス局法では複雑な移動平均を繰り返し季節性を除去するが、実は季節性と季節調整系列をどの様に定義しているか、定かではないという基本問題が存在する。他方、統計的時系列モデルにもとづく季節調整法としては北川源四郎氏が開発したDECOMP<sup>14</sup>がよく知られている。DECOMPでは季節性は時間領域の非定常線形モデルとして定式化されSquare-Root-Filterによるフィルタリングと平滑化により季節調整が行われている。S-SIML法とDECOMP法の比較については例えばSato and Kunitomo(2026)4節が行っているが、さらなる検討が必要である。またS-SIML季節法は非定常季節経済時系列において、たとえ欠損値があっても簡単な方法で適応可能であることを国友編(2025)の論考は例示している。さらに日次データ、週次データなど従来の分析方法では困難と思われる経済データの分析も周期と周波数により定義でき

---

<sup>12</sup>マルチンゲール(martingale)はRandom Walk(ランダム・ウォーク)を一般化した確率過程であり、離散martingale測度, 連続martingale測度との等価性はファイナンス(Finance)理論の基礎となっている。マルチンゲールは一般に非定常確率過程の一種でありスペクトル分布は定義できない。

<sup>13</sup>センサス法について詳しくはU.S.CENSUS(2026)を参照されたい。

<sup>14</sup>プログラムtsssに収録されているDECOMPについては[https://jasp.ism.ac.jp/ism/tsss/index\\_e.html](https://jasp.ism.ac.jp/ism/tsss/index_e.html), R-パッケージは<https://cran.r-project.org/web/packages/tsss/index.html>から利用可能である。例えば北川(1997, 2020)が解説している。

れば分析は可能と考えられる。

本稿で説明した S-SIML 季節調整法は統計的方法としては単純でありかつ実用的にも有用と思われる。経済時系列に特有な変化点や税制の変更などを考慮しつつも周波数と周期による直観的な季節性の理解と季節調整への実務的応用も可能である。この小論が経済時系列における季節性と季節調整法という統計的問題の理解と季節調整という実務上での問題についての今後の展開の一つのきっかけとして寄与できれば幸いである。

## References

- [1] 北川源四郎 (1997), 「季節調整プログラム DECOMP とその後の展開」, 統計数理 45-2, 217-232.
- [2] 北川源四郎 (2020), 「R による時系列モデリング入門」, 岩波書店. (Kitagawa, G. (2021) *Introduction to Time Series Modeling with Application in R*, CRC Press.)
- [3] 国友直人編 (2025), 「移動型休日と経済指標の季節性」, SSE-DP-2025-1, 統計数理研究所。  
<https://stat-expert.ism.ac.jp/training/discussionpaper/>
- [4] Kunitomo, N. and S. Sato (2021), "A Robust-filtering Method for Noisy Non-Stationary Time Series," *Japanese Journal of Statistics and Data Science (JJSD, Springer)*, 4, 373-410, Open Access.
- [5] Kunitomo, N. and S. Sato (2025), *The SIML Filtering Method for Noisy Non-stationary Economic Time Series*, Springer.
- [6] 国友直人・櫻井智章・佐藤整尚 (2022), “経済時系列の状態推定とマクロ指標,” 統計研究彙報, 79, 1-20, 統計局, (訂正)2024-10-18:  
<https://www.stat.go.jp/training/2kenkyu/2-2-old.html>
- [7] 櫻井智章 (2026), “SIML スムージング法による季節調整における曜日効果及び日本型休日効果の調整に関する研究,” 統計研究彙報, 83, 21-40, 統計局,  
<https://www.stat.go.jp/training/2kenkyu/2-2-new.html>
- [8] 佐藤整尚 (2023), “x12SIML を使った季節調整の実際,” 未定稿.  
(日本語 version)  
<https://github.com/sato-labo/x12siml /x12simldoc92.pdf>

(English version)

[https://github.com/sato-labo/x12siml /x12simldoc92\(kuni2023-2-2\).pdf](https://github.com/sato-labo/x12siml /x12simldoc92(kuni2023-2-2).pdf)

- [9] Sato, S. and Kunitomo, N (2026), "Forward and Backward Smoothing for Noisy Nonstationary Time Series with an Application of Detecting Recent Change Points," Unpublished Manuscript, SSE-DP-2024-5 の改訂稿,  
<https://stat-expert.ism.ac.jp/training/discussionpaper/>
- [10] 高岡慎 (2015), 「経済時系列と季節調整法」, 朝倉書店.
- [11] U.S. CENSUS (2022), X-13ARIMA-SEATS,  
<https://www.census.gov/data/software/x13as.html> .

## < 補論：非定常時系列の SIML 分解 >

この補論では Kunitomo and Sato (2025) で詳しく説明した非定常時系列の SIML 分解を数理的証明を抜きにその概要をやや直観的に説明する。 $p$  ( $p \geq 1$ ) 次元の非定常なトレンド・サイクル成分と, 定常な季節成分および測定誤差成分を扱うため, 非定常多変量変数誤差モデル

$$(A.1) \quad \mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i + \mathbf{s}_i + \mathbf{v}_i \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

を導入する。各成分  $\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{s}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) は相互に独立であると仮定して次のような各成分を考察する。

(i) トレンド・サイクル成分  $\mathbf{x}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) は,

$$(A.2) \quad \Delta \mathbf{x}_i = (1 - \mathcal{L})\mathbf{x}_i = \mathbf{v}_i^{(x)},$$

を満たす非定常 I(1) 過程とする。ここでラグ演算子は  $\mathcal{L}\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1}$ ,  $\Delta = 1 - \mathcal{L}$  である。さらに

$$(A.3) \quad \mathbf{v}_i^{(x)} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_j^{(x)} \mathbf{e}_{i-j}^{(x)},$$

と表し,  $\mathbf{e}_i^{(x)}$  は  $\mathbf{E}(\mathbf{e}_i^{(x)}) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{e}_i^{(x)} \mathbf{e}_i^{(x)'}) = \Sigma_e^{(x)}$  (半正定値) を満たす i.i.d. 過程とする。係数行列  $\mathbf{C}_j^{(x)}$  ( $= c_{kl}^{(x)}(j)$ ) は絶対値和が有限で  $\|\mathbf{C}_j^{(x)}\| = O(\rho^j)$  ( $0 \leq \rho < 1$ ) を満たすとするが、ノルムは  $\|\mathbf{C}_j^{(x)}\| = \max_{k,l=1,\dots,p} |c_{kl}^{(x)}(j)|$  である。

(ii) 測定誤差 (ランダム・ノイズ) 成分  $\mathbf{v}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) は定常 I(0) 過程であり,

$$(A.4) \quad \mathbf{v}_i = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_j^{(v)} \mathbf{e}_{i-j}^{(v)},$$

と表されるが、係数行列  $\mathbf{C}_j^{(v)}$  の絶対値の和は有限で  $\|\mathbf{C}_j^{(v)}\| = O(\rho^j)$  ( $0 \leq \rho < 1$ ) を満たすとする。ここで  $\mathbf{e}_i^{(v)}$  は  $\mathbf{E}(\mathbf{e}_i^{(v)}) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{e}_i^{(v)} \mathbf{e}_i^{(v)'}) = \Sigma_e^{(v)}$  (正定値) を満たす i.i.d. 過程である。

(iii) (簡単化の為に) 正の整数  $s$  ( $s > 1$ ) と  $N$  を取り,  $n = sN$  として季節成分  $\mathbf{s}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) は定常過程であり,

$$(A.5) \quad \mathbf{s}_i = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_{sj}^{(s)} \mathbf{e}_{i-sj}^{(s)},$$

を満たすとする。ここでラグ演算子は  $\mathcal{L}^s \mathbf{s}_i = \mathbf{s}_{i-s}$  ( $s \geq 2$ ),  $\mathbf{e}_i^{(s)}$  は  $\mathbf{E}(\mathbf{e}_i^{(s)}) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{e}_i^{(s)} \mathbf{e}_i^{(s)'}) = \Sigma_e^{(s)}$  (非負定値) を満たす i.i.d. 過程, 係数行列  $\mathbf{C}_j^{(s)}$  は絶対値の和は有限,  $\|\mathbf{C}_j^{(s)}\| = O(\rho^j)$  ( $0 \leq \rho < 1$ ) を満たすとする。

このとき時系列を構成する各成分  $\Delta \mathbf{x}_i$ ,  $\mathbf{v}_i$ ,  $\mathbf{s}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) の  $p \times p$  スペクトル密度行列はそれぞれ

$$(A.6) \quad \mathbf{f}_{\Delta x}(\lambda) = \left( \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_j^{(x)} e^{2\pi i \lambda j} \right) \Sigma_e^{(x)} \left( \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_j^{(x)'} e^{-2\pi i \lambda j} \right) \quad (0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}),$$

$$(A.7) \quad \mathbf{f}_v(\lambda) = \left( \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_j^{(v)} e^{2\pi i \lambda j} \right) \Sigma_e^{(v)} \left( \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_j^{(v)'} e^{-2\pi i \lambda j} \right) \quad (0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}),$$

および

$$(A.8) \quad \mathbf{f}_s(\lambda) = \left( \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_{sj}^{(s)} e^{2\pi i \lambda sj} \right) \Sigma_e^{(s)} \left( \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_{sj}^{(s)'} e^{-2\pi i \lambda sj} \right) \quad (0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2})$$

で与えられる。ただし  $i^2 = -1$ , 基準化のために  $\mathbf{C}_0^{(x)} = \mathbf{C}_0^{(v)} = \mathbf{C}_0^{(s)} = \mathbf{I}_p$  である。観察系列の差分系列  $\Delta \mathbf{y}_i (= \mathbf{y}_i - \mathbf{y}_{i-1})$  に対する  $p \times p$  スペクトル密度行列は

$$(A.9) \quad \mathbf{f}_{\Delta y}(\lambda) = \mathbf{f}_{\Delta x}(\lambda) + (1 - e^{2\pi i \lambda}) [\mathbf{f}_s(\lambda) + \mathbf{f}_v(\lambda)] (1 - e^{-2\pi i \lambda})$$

となる。

ここで観測値行列  $\mathbf{Y}_n = (y_{ij})$  から  $\mathbf{Z}_n (= (\mathbf{z}'_k))$  への  $\mathbf{K}_n^*$  変換を

$$(A.10) \quad \mathbf{Z}_n = \mathbf{K}_n^* (\mathbf{Y}_n - \bar{\mathbf{Y}}_0), \mathbf{K}_n^* = \mathbf{P}_n \mathbf{C}_n^{-1},$$

により定義する。ただし  $\mathbf{y}_0$  は  $\mathbf{y}_t$  ( $p \times 1$ ) の初期ベクトルで観察可能として,  $\bar{\mathbf{Y}}_0 = \mathbf{1}_n \cdot \mathbf{y}'_0$ , また

$$(A.11) \quad \mathbf{C}_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n},$$

$$(A.12) \quad \mathbf{P}_n = (p_{jk}^{(n)}), \quad p_{jk}^{(n)} = \sqrt{\frac{2}{n + \frac{1}{2}}} \cos \left[ \frac{2\pi}{2n+1} \left( k - \frac{1}{2} \right) \left( j - \frac{1}{2} \right) \right].$$

である。

スペクトル分解  $\mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{C}_n'^{-1} = \mathbf{P}_n \mathbf{D}_n \mathbf{P}_n$  を用いると、 $\mathbf{D}_n$  は対角行列であり、第  $k$  対角要素は

$$d_k = 2 \left[ 1 - \cos \left( \pi \frac{2k-1}{2n+1} \right) \right], \quad k = 1, \dots, n$$

より  $a_{kn}^* (= d_k) = 4 \sin^2 \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{2k-1}{2n+1} \right) \right]$  ( $k = 1, \dots, n$ ) となる。

次に  $f_{\Delta x}^{(SR)}(\lambda_k)$  対称化したスペクトル密度を  $f_v^{(SR)}(\lambda_k) = (1/2)[f_v(\lambda_k) + \bar{f}_v(\lambda_k)]$ ,  $f_s^{(SR)}(\lambda_k) = (1/2)[f_s(\lambda_k) + \bar{f}_s(\lambda_k)]$ ,  $f_{\Delta x}^{(SR)}(\lambda_k) = (1/2)[f_{\Delta x}(\lambda_k) + \bar{f}_{\Delta x}(\lambda_k)]$  とする。(ただし  $\bar{f}$  は  $f$  複素共役数を意味する。)  $K_n^*$  変換により得られる  $Z$  変数が近似的にガウス分布にしたがうこと<sup>15</sup> を用いると、初期値  $\mathbf{y}_0$  が与えられた下で、定数倍を除いて近似的に  $(-2) \times (\text{対数尤度})$  は

$$(A.13) \quad (-2)l_n(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{k=1}^n \log |a_{kn}^* (f_v^{(SR)}(\lambda_k) + f_v^{(SR)}(\lambda_k)) + f_{\Delta x}^{(SR)}(\lambda_k)| \\ + \sum_{k=1}^n \mathbf{z}_k' [a_{kn}^* (f_v^{(SR)}(\lambda_k) + f_s^{(SR)}(\lambda_k)) + f_{\Delta x}^{(SR)}(\lambda_k)]^{-1} \mathbf{z}_k$$

で与えられる。特に  $\mathbf{v}_i^{(x)}$ ,  $\mathbf{v}_i$ ,  $\mathbf{s}_i$  が互いに独立な i.i.d. ベクトルとすると、定数を除き  $(-2)l_n(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{k=1}^n \log |a_{kn}^* (\boldsymbol{\Sigma}_e^{(v)} + \boldsymbol{\Sigma}_e^{(s)}) + \boldsymbol{\Sigma}_e^{(x)}| + \sum_{k=1}^n \mathbf{z}_k' [a_{kn}^* (\boldsymbol{\Sigma}_e^{(v)} + \boldsymbol{\Sigma}_e^{(s)}) + \boldsymbol{\Sigma}_e^{(x)}]^{-1} \mathbf{z}_k$  と近似できる。ここで  $\boldsymbol{\theta}$  は母数ベクトルを意味する。さらに  $n \rightarrow \infty$ ,  $m/n \rightarrow 0$  とすると  $a_{kn}^* \rightarrow 0$  ( $k = 1, \dots, m$ ) より尤度関数の最初の  $m$  項は定数を除き  $(-2)l_m^*(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{k=1}^m \log |\boldsymbol{\Sigma}_e^{(x)}| + \sum_{k=1}^m \mathbf{z}_k' [\boldsymbol{\Sigma}_e^{(x)}]^{-1} \mathbf{z}_k$  と近似できる。この最後の形は統計的多変量解析における  $m$  個のデータから得られる表現に一致する。関数  $l_m(\boldsymbol{\theta})$  を最大化すると

$$(A.14) \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_e^{(x)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i'$$

が得られるが、この表現は Kunitomo and Sato (2021) により導かれた分散共分散行列  $\boldsymbol{\Sigma}_e^{(x)}$  の SIML 推定量に一致する。さらにこの推定量を部分尤度関数に代入すると定数を除き  $(-2)l_m^*(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \sim m \log |\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_e^{(x)}|$  となる。なお赤池の FPE (final prediction error) は元々はノイズや季節性のない定常過程に対する  $n \log |\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_e|$  (ただし  $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_e$  はイノベーション項の分散共分散の推定量) が対応するので、利用について注意と解釈が必要である。

<sup>15</sup>例えば Kunitomo and Sato (2026) の 3 章で説明している。

ここで SIML 分解の直観的理解のために、特に季節性がなく自己相関がない単純な場合をとりあげてみよう。トレンドの誤差成分について (時刻  $i$  について) 互いに独立,  $\mathbf{E}(\mathbf{v}_i^{(x)}) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{v}_i^{(x)} \mathbf{v}_i^{(x)'}) = \boldsymbol{\Sigma}_x$  (半正定値行列), 測定誤差成分について (時刻  $i$  について) 互いに独立,  $\mathbf{E}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i') = \boldsymbol{\Sigma}_v$  (半正定値行列) とする。さらに,  $\Delta \mathbf{x}_i (= \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1})$  と  $\mathbf{v}_i$  の各対が, それぞれ  $N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_x)$  および  $N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_v)$  に従う独立同分布な正規分布 (i.i.d.) であるとする。観測行列  $\mathbf{Y}_n = (\mathbf{y}'_i)$  ( $n \times p$ ) に対して,  $np \times 1$  ベクトル  $(\mathbf{y}'_1, \dots, \mathbf{y}'_n)'$  は初期条件  $\mathbf{y}_0 (= \mathbf{x}_0)$  の下で,

$$(A.15) \quad \text{vec}(\mathbf{Y}_n) \sim N_{np}(\mathbf{1}_n \cdot \mathbf{y}'_0, \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_v + \mathbf{C}_n \mathbf{C}_n' \otimes \boldsymbol{\Sigma}_x),$$

が成り立つ。ここで  $\mathbf{1}'_n = (1, \dots, 1)$ ,  $\mathbf{I}_n$  は  $n \times n$  単位行列であり,

$$\mathbf{C}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

次に  $\mathbf{K}_n^*$  変換に基づく平滑化を説明しよう。 $n \times p$  の確率行列  $\mathbf{Z}_n = \mathbf{P}_n \mathbf{C}_n^{-1}(\mathbf{Y}_n - \bar{\mathbf{Y}}_0)$  の各成分を周波数領域における実数値として解釈すると,  $\mathbf{P}_n$  は実数値の離散フーリエ変換の一種であるため,  $\mathbf{Z}_n$  に含まれるベクトル  $\mathbf{z}_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) は漸近的に無相関となる。そこで変換後の直交過程の部分的逆変換 (partial inversion) を利用する。 $n \times p$  行列を

$$(A.16) \quad \hat{\mathbf{X}}_n(Q) = \mathbf{C}_n \mathbf{P}_n \mathbf{Q}_n \mathbf{P}_n \mathbf{C}_n^{-1}(\mathbf{Y}_n - \bar{\mathbf{Y}}_0)$$

により定義するが,

$$(A.17) \quad \mathbf{Z}_n = \mathbf{P}_n \mathbf{C}_n^{-1}(\mathbf{Y}_n - \bar{\mathbf{Y}}_0), \mathbf{Y}_n = \bar{\mathbf{Y}}_0 + \mathbf{X}_n^* + \mathbf{S}_n + \mathbf{V}_n,$$

である。ここで  $\mathbf{X}_n^* = (\mathbf{x}_i^*)'$ ,  $\mathbf{S}_n = (\mathbf{s}_i)'$ ,  $\mathbf{V}_n = (\mathbf{v}_i)'$  はいずれも  $n \times p$  行列であり,  $\mathbf{x}_i^* = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0$  は初期ベクトルである。 $n \times n$  行列  $\mathbf{P}_n$  は (A.12) で与えられる。

次に  $\mathbf{Q}_n$  を導入するが,  $n \times n$  の平滑化行列である。例えば  $n \times n$  の正方行列  $\mathbf{Q}_n = \sum_{i=1}^n w_i^{(n)} \mathbf{e}_i^{(n)} \mathbf{e}_i^{(n)'}$  とする。ただし  $\mathbf{e}_i^{(n)} = (0, \dots, 1, \dots, 0)'$  ( $i = 1, \dots, n$ ) は単位ベクトルで  $\mathbf{e}_i^{(n)' } \mathbf{e}_i^{(n)} = 1$  を満たし,  $w_i^{(n)}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) は非負定数とする。

特に  $w_i^{(n)} = 1$  ( $i = 1, \dots, n$ ) にとれば  $\mathbf{Q}_n = \mathbf{I}_n$  であるので,  $\mathbf{C}_n \mathbf{P}_n \mathbf{Q}_n \mathbf{P}_n \mathbf{C}_n^{-1} = \mathbf{I}_n$  となる。次に、ある  $i$  に対して  $w_i^{(n)} = 1$  または 0 を選ぶことにより有用な場合が

得られるが、以下ではトレンド・サイクル平滑化とバンド平滑化の2例を示す。第1の例は第2の例の特殊例とみなすこともできるが、第1の例はトレンド・サイクル成分、第2の例は季節性の分析にそれぞれ重要な役割を果たす。

例1：トレンド・サイクル平滑化： $m \times n$  ( $m < n$ ) の選択行列  $\mathbf{J}_m = (\mathbf{I}_m, \mathbf{O})$  により

$$(A.18) \quad \hat{\mathbf{X}}_n^{(m)} = \mathbf{C}_n \mathbf{P}_n \mathbf{J}'_m \mathbf{J}_m \mathbf{P}_n \mathbf{C}_n^{-1} (\mathbf{Y}_n - \bar{\mathbf{Y}}_0)$$

とする。ただし  $\mathbf{Q}_n = \mathbf{J}'_m \mathbf{J}_m$  である。

この操作は  $\mathbf{Z}_n$  の逆変換を用いて季節成分およびノイズ成分を除去することにより低周波数部分のみに基づいて  $n \times p$  の状態行列  $\mathbf{X}_n^*$  を推定することを意味している。ここで  $m$  個の周波数に基づく潜在トレンド・サイクル変数を

$$(A.19) \quad \mathbf{X}_n^{(m)} = \mathbf{C}_n \mathbf{P}_n \mathbf{J}'_m \mathbf{J}_m \mathbf{P}_n \mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{X}_n^*$$

と表現しよう。この量は  $\mathbf{X}_n^*$  と異なるが、それは状態変数  $\mathbf{x}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) は  $\mathbf{y}_i$  のトレンド・サイクル成分だけでなく、周波数領域におけるノイズ成分も含むことによる。ただし観測誤差成分  $\mathbf{v}_i$  は観測行列の差分変換により測定誤差ノイズの差分に変換され ( $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{i-1}$ ) その影響はゼロ周波数の近傍では無視できることになる。

例2：バンド平滑化： $\mathbf{K}_n^*$  変換に基づく平滑化として確率行列  $\mathbf{Z}_n$  のうち、ある特定の周波数の周辺部分のみ除去する逆変換を行う。この操作の重要な例として、離散時系列における季節周波数の解析を挙げることができる。ここで  $m_2 \times [m_1 + m_2 + (n - m_1 - m_2)]$  の選択行列  $\mathbf{J}_{m_1, m_2} = (\mathbf{O}, \mathbf{I}_{m_2}, \mathbf{O})$  ( $m_1 + m_2 < n$  とする) を定め、

$$(A.20) \quad \hat{\mathbf{X}}_n^{(m_1, m_2)} = \mathbf{C}_n \mathbf{P}_n \mathbf{J}'_{m_1, m_2} \mathbf{J}_{m_1, m_2} \mathbf{P}_n \mathbf{C}_n^{-1} (\mathbf{Y}_n - \bar{\mathbf{Y}}_0)$$

および  $\mathbf{Q}_n = \mathbf{J}'_{m_1, m_2} \mathbf{J}_{m_1, m_2}$  を定義する。

特定の季節周波数  $s$  ( $> 1$ ) がある場合、例えば  $m_1 = [2n/s] - h$ ,  $m_2 = 2h + 1$  ( $h \geq 1$ ) と取ることができる。四半期データでは  $s = 4$ , 月次データでは  $s = 12$  を用いる。トレンド・サイクルの平滑化と同様に、

$$(A.21) \quad \mathbf{X}_n^{(m_1, m_2)} = \mathbf{C}_n \mathbf{P}_n \mathbf{J}'_{m_1, m_2} \mathbf{J}_{m_1, m_2} \mathbf{P}_n \mathbf{C}_n^{-1} (\mathbf{X}_n^* + \mathbf{S}_n),$$

に対する SIML フィルタリング値であり、(A.1), (A.2), (A.5) における  $\mathbf{x}_i + \mathbf{s}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) のある周波数成分の推定値である。しかし平滑化問題では  $\mathbf{y}_i$  のある周波数成分が、同一周波数における  $\mathbf{x}_i$  の成分だけでなく、測定誤差の同一周波数成分も含んでいることから困難な問題が生じる。ここでは特定の周波数（例えば季節成分）に対しては、 $(m_2 - m_1) \times n$  の選択行列  $\mathbf{J}_{m_1, m_2} = (\mathbf{O}, \mathbf{I}_{m_2 - m_1}, \mathbf{O})$  を用いている。ただし  $m_1 = [2n/s] - h$ ,  $m_2 = [2n/s] + h$  というように表記することも可能であるが、平滑化行列は  $\mathbf{Q}_n^* = \mathbf{I}_n - \mathbf{J}'_{m_1, m_2} \mathbf{J}_{m_1, m_2}$  である。

ノイズを含む非定常時系列を扱う場合、季節性成分および低周波成分を除去する必要が生じることが多い。さらに公的統計への応用においては、季節性を考慮するときには、例えばうるう年効果を含む稼働日 (trading-day) 成分、2008 年の金融危機のような構造変化、あるいは日本の消費税導入のような制度変更など、追加的な効果を考慮した上で季節調整系列を構成する必要が生じる。こうした効果は事後的にみれば決定論的と見なすことができることが少なくない。ここで観測されたベクトル時系列  $\mathbf{y}_i$  が  $\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i + \mathbf{SCO}_i + \mathbf{v}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), と分解されるとする。ここで  $\mathbf{SCO}_i = \mathbf{SC}_i + \mathbf{O}_i$  とし、 $\mathbf{x}_i$  はトレンド・循環成分、 $\mathbf{SC}_i$  は構造変化成分、 $\mathbf{v}_i$  はノイズ成分、 $\mathbf{O}_i$  は外れ値成分を表す。さらに  $\mathbf{SC}_i$  と  $\mathbf{O}_i$  が  $\mathbf{SC}_i + \mathbf{O}_i = \mathbf{SCO}_i(w)$  と表される場合を考え、 $\mathbf{w}$  を操作変数あるいは外生変数の集合を表すことにしよう。この項が線形関係で表されるとして、

$$(A.22) \quad \mathbf{y}_i = \mathbf{B}' \mathbf{w}_i + \mathbf{u}_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

と表現する。ここで  $\mathbf{B}'$  は  $p \times r$  行列、 $\mathbf{w}_i$  は  $r \times 1$  の操作変数ベクトル、 $\mathbf{u}_i = \mathbf{x}_i + \mathbf{s}_i + \mathbf{v}_i$  は I(1) 過程の系列を表している。すなわちこの統計モデルは、誤差項が定常ノイズ項や季節項を含む I(1) 過程である多変量回帰モデルとなっている。ここではダミー変数などの外生的情報を取り込むことで、観測時系列から特定の成分を抽出・除去する方法を提案する。

トレンド成分と季節成分の回帰および平滑化手順を得るため、データに対し  $\mathbf{K}_n^*$  変換を施し、次のように書き換える：

$$(A.23) \quad \mathbf{Y}_n^* = \mathbf{W}_n^* \mathbf{B} + \mathbf{U}_n^*,$$

ここで  $\mathbf{Y}_n^* = \mathbf{P}_n \mathbf{C}_n^{-1} (\mathbf{Y}_n - \mathbf{Y}_0)$ ,  $\mathbf{W}_n^* = \mathbf{P}_n \mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{W}_n$  ( $\mathbf{W}_n = (\mathbf{w}_t')$ ) はそれぞれ  $n \times p$  と  $n \times r$  の被説明変数行列と説明変数行列を表し、また  $\mathbf{U}_n^* = \mathbf{P}_n \mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{U}_n$ ,  $\mathbf{U}_n = (\mathbf{u}_i')$  は  $n \times p$  のノイズ (攪乱項) 行列である。初期条件  $\mathbf{y}_0 (= \mathbf{x}_0)$  を固定し、状態変数として  $\mathbf{x}_i^* = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0$  をとることにする。上の表現を線形回帰式として解釈し、 $(p+r) \times 1$  変数ベクトル

$$\mathbf{y}_i^* = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_i \\ \mathbf{w}_i \end{bmatrix}$$

とすると、Kunitomo and Sato (2025) の Theorem 5.1 を適用することができ、漸近的分布を得ることができる。変数ベクトル  $\mathbf{w}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) が決定論的であれば、条件

$$(A.24) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \mathbf{W}_m^{*'} \mathbf{W}_m^* = \Sigma_{w^*},$$

を仮定する必要がある。ただし  $\Sigma_{w^*}$  は正定値行列、 $\mathbf{W}_m^* = \mathbf{J}_m \mathbf{P}_n \mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{W}_n$  は  $m \times r$  行列とする。

ここで  $r \times 1$  の操作変数  $\mathbf{w}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) が外生的あるいは決定論的,  $\mathbf{Y}_m^* = \mathbf{W}_m^* \mathbf{B} + \mathbf{U}_m^*$ ,  $\mathbf{U}_m^* = \mathbf{J}_m \mathbf{U}_n^*$ ,  $\mathbf{Y}_m^* = \mathbf{J}_m \mathbf{P}_n \mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{Y}_n$ ,  $\mathbf{W}_m^* = \mathbf{J}_m \mathbf{P}_n \mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{W}_n$  とする。このとき  $\mathbf{Y}_m^*$  を  $\mathbf{W}_m^*$  に回帰した係数行列の最小二乗推定量は

$$\hat{\mathbf{B}}_m = (\mathbf{W}_m^{*'} \mathbf{W}_m^*)^{-1} \mathbf{W}_m^{*'} \mathbf{Y}_m^*$$

で与えられる。さらに  $m_n = n^\alpha$  ( $0 < \alpha < 0.8$ ),  $m = [m_n]$  とおく。このとき  $n \rightarrow \infty$  につれて

$$(A.25) \quad \sqrt{m_n} [\hat{\mathbf{B}}_m - \mathbf{B}] \xrightarrow{w} N(\mathbf{0}, \Sigma_w^{-1} \otimes \Sigma_x).$$

が成立する。

変換後の操作変数を

$$(A.26) \quad \hat{\mathbf{W}}_n = \mathbf{J}_W \mathbf{P}_n \mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{W}_n$$

と定義する。ここで  $\mathbf{J}_W$  は  $q \times n$  の選択行列である。また冪等行列 ( $q \times q$  行列)

$$(A.27) \quad \mathbf{Q}_W = \hat{\mathbf{W}}_n (\hat{\mathbf{W}}_n' \hat{\mathbf{W}}_n)^{-1} \hat{\mathbf{W}}_n'$$

を定めよう。ただし条件  $q > r$  を仮定する。

ここで射影行列  $\mathbf{Q}_W$  を用いて平滑化に回帰情報を取り入れ、

$$(A.28) \quad \hat{\mathbf{X}}_n^{(w)} = \mathbf{C}_n \mathbf{P}_n \mathbf{J}_W' \mathbf{Q}_W \mathbf{J}_W \mathbf{P}_n \mathbf{C}_n^{-1} (\mathbf{Y}_n - \bar{\mathbf{Y}}_0)$$

を構成する。外生情報を平滑化手順にどのように組み込むかにはいくつかの選択肢がある。 $\mathbf{Q}_W^2 = \mathbf{Q}_W$  を満たす冪等行列として  $\mathbf{Q}_W$  を取る場合を考えるのが自然である。本章では、二つの代替的平滑化手順, **Type-I** と **Type-II** を用いる。Type-I 平滑化はトレンド・循環成分における変化点 (change-point) 平滑化に適し, Type-II 平滑化はノイズ成分における季節調整や外れ値検出に有用である。

**Type-I 平滑化** : トレンド・循環に関する  $\mathbf{Y}_n$  の回帰部分は,  $\mathbf{J}_W = \mathbf{J}_m = (\mathbf{I}_m, \mathbf{O})$  とすると (A.23) で与えられる。ここで  $\hat{\mathbf{W}}_n$  は  $m \times n$  行列であり,  $\mathbf{J}_m$  は  $m \times n$  行列である。さらに  $m \times m$  行列

$$(A.29) \quad \mathbf{Q}_m^{(1)} = \hat{\mathbf{W}}_n (\hat{\mathbf{W}}_n' \hat{\mathbf{W}}_n)^{-1} \hat{\mathbf{W}}_n'$$

を定める。回帰効果を除去しトレンド・循環部分のみを用いたい場合には,  $\mathbf{J}_W = \mathbf{J}_m$  とし,

$$(A.30) \quad \mathbf{Q}_m^{(2)} = \mathbf{I}_m - \mathbf{Q}_m^{(1)} = \mathbf{I}_m - \hat{\mathbf{W}}_n (\hat{\mathbf{W}}_n' \hat{\mathbf{W}}_n)^{-1} \hat{\mathbf{W}}_n'$$

を取ればよい。このとき次の分解を得る :

$$(A.31) \quad \begin{aligned} \hat{\mathbf{X}}_n^{(m)} &= \mathbf{C}_n \mathbf{P}_n \mathbf{J}_m' \mathbf{J}_m \mathbf{P}_n \mathbf{C}_n^{-1} (\mathbf{Y}_n - \bar{\mathbf{Y}}_0) \\ &= \mathbf{C}_n \mathbf{P}_n \mathbf{J}_m' [\mathbf{Q}_m^{(1)} + \mathbf{Q}_m^{(2)}] \mathbf{J}_m \mathbf{P}_n \mathbf{C}_n^{-1} (\mathbf{Y}_n - \bar{\mathbf{Y}}_0). \end{aligned}$$

この表現では  $\mathbf{Q}_n^2 = \mathbf{Q}_n = \mathbf{Q}_n^{(1)} + \mathbf{Q}_n^{(2)} = \mathbf{I}_m$  が成り立ち、トレンド・循環部分と回帰部分の分解が得られる。この平滑化は、低周波側の  $m$  個の周波数における回帰部分のみを用いているため、簡明な解釈が可能である。

**Type-II 平滑化**：トレンド成分だけでなくノイズ成分も推定する必要がある場合には、構造変化および外れ値成分を統合的に推定することが重要である。時系列の季節調整のためには、季節調整系列を得るために季節成分を推定する必要があり、季節成分が対応する周波数帯を除去する  $q \times n$  の選択行列  $\mathbf{F}_q$  を次のように構成する。四半期データで  $s = 4$  のとき、周波数  $\lambda_s = 1/4, 1/2$  の近傍にあるデータを除去することが必要である（ $1/2$  は2四半期周期、 $1/4$  は4四半期周期に対応する）。しかし、四半期データの観測系列を用いる限り、4四半期周期と2四半期周期とを区別することはできない。そこで  $m_1 = [2n/s]$ 、小さな正整数  $h > 0$  に対して  $(n - 2h - 1) \times n$  の選択行列と  $(n - 3h - 2) \times (n - 2h - 1)$  の選択行列をそれぞれ

$$(A.32) \quad \mathbf{J}_1^Q = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m_1-(h+1)} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{I}_{n-m_1-h} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_2^Q = [\mathbf{I}_{n-3h-2}, \mathbf{O}]$$

とする。さらに  $q \times n$  行列

$$(A.33) \quad \mathbf{F}_q^Q = \mathbf{J}_2^Q \mathbf{J}_1^Q$$

をとる。

月次データ  $s = 12$  のときには、月次観測のみから12ヶ月周期と6,4,3,2.4,2ヶ月周期の変動を区別できないため、季節性を除去するにはより複雑な変換が必要となる。すなわち、 $\lambda_s = 1/12, 2/12, 3/12, 4/12, 5/12, 6/12$  近傍の周波数帯に対応する成分を除去する必要がある。ここで  $m_i = i[2n/s]$  とし、 $(n - i(2h + 1)) \times (n - (i - 1)(2h + 1))$  の選択行列 ( $i = 1, \dots, 5$ ) と、 $(n - 5(2h + 1) - (h + 1)) \times (n - 5(2h + 1))$  の選択行列を取り、小さな正の整数  $h > 0$  に対して

$$(A.34) \quad \mathbf{J}_i^M = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m_i-(i-1)(2h+1)-(h+1)} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{I}_{n-m_i-h} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_6^M = [\mathbf{I}_{n-11h-6}, \mathbf{O}]$$

と定義する。 $\mathbf{J}_j^M$  ( $j = 1, \dots, 6$ ) を用いて季節周波数  $\lambda_{j_s}$  ( $j = 2, 3, 4, 5$ ) 近傍のデータを除去するため、 $q \times n$  行列

$$(A.35) \quad \mathbf{F}_q^M = \prod_{j=1}^6 \mathbf{J}_{7-j}^M$$

を定める。

一般に操作変数  $\mathbf{W}_n$  の情報があるときには次のように回帰により推定係数を取り入れることができる：行列  $\mathbf{Y}_m^* = \mathbf{F}_q \mathbf{P}_n \mathbf{C}_n^{-1} (\mathbf{Y}_n - \bar{\mathbf{Y}}_0)$  を行列  $\mathbf{W}_m^* = \mathbf{F}_q \mathbf{P}_n \mathbf{C}_n^{-1} (\mathbf{W}_n - \bar{\mathbf{W}}_0)$  に回帰する。なお  $\mathbf{F}_q$  ( $q \times n$  行列) は  $\mathbf{F}_q^Q$  または  $\mathbf{F}_q^M$  のいずれかをとるものとする。

る。さらに Type-II 平滑化は  $\mathbf{Q}_n^{(3)} = \mathbf{W}_n^* (\mathbf{W}_n^{*'} \mathbf{W}_n^*)^{-1} \mathbf{W}_n^{*'}$  . および  $\mathbf{Q}_n^{(4)} = \mathbf{F}_q \mathbf{F}_q' - \mathbf{Q}_n^{(2)}$  によって定義される。このとき、次の分解が成り立つ：

$$(A.36) \quad \begin{aligned} \hat{\mathbf{X}}_n^{(F)} &= \mathbf{C}_n \mathbf{P}_n \mathbf{F}_q' \mathbf{F}_q \mathbf{P}_n \mathbf{C}_n^{-1} (\mathbf{Y}_n - \bar{\mathbf{Y}}_0) \\ &= \mathbf{C}_n \mathbf{P}_n \mathbf{F}_q' [\mathbf{Q}_n^{(3)} + \mathbf{Q}_n^{(4)}] \mathbf{F}_q \mathbf{P}_n \mathbf{C}_n^{-1} (\mathbf{Y}_n - \bar{\mathbf{Y}}_0) . \end{aligned}$$

この場合、 $\mathbf{Q}_n^{(3)} + \mathbf{Q}_n^{(4)} = \mathbf{F}_q \mathbf{F}_q' = \mathbf{I}_q$  という分解が成立し、トレンド・循環部分と回帰部分の対応する分解が得られる。

ダミー変数の例：ここで外れ値ダミーやトレンド・ダミーの例を幾つか挙げる。これは例示の為であり内蔵されている変数リストは佐藤 (2023) が説明している。例えば X-12-ARIMA および X-13ARIMA-SEATS プログラムでは、Reg-ARIMA モデリングにおいて幾つかのダミー変数が用いられる<sup>16</sup>。ここでダミー変数を  $w_s$  ( $s = 1, \dots, n$ ) とすると、次のような例が良く用いられる。

レベル・シフト (LS) 変数は  $s < t$  のとき  $w_s = 0$ ,  $s \geq t$  のとき  $w_s = 1$  ( $s = 1, \dots, n$ ) として定義する。

例 2：外れ値変数は  $s = t$  のとき  $w_s = 1$ ,  $s \neq t$  のとき  $w_s = 0$  ( $s = 1, \dots, n$ ) として定義する。この変数はしばしば加法的外れ値 (AO) と呼ばれている。

例 3：ランプ・ダミー変数 (rp) は  $s < t_0$  のとき  $w_s = 0$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$  のとき  $w_s = -(t - t_0)/(t_1 - t_0)$ ,  $s \geq t_1$  のとき  $w_s = -1$  として定義する。

例 4：ダブル・ランプ・ダミー変数は  $s < t_0$  のとき  $w_s = 0$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$  のとき  $w_s = -(t - t_0)/(t_1 - t_0)$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$  のとき  $w_s = (t - t_1)/(t_2 - t_1)$ ,  $s \geq t_2$  のとき  $w_s = c$  として定義する。なおこの変数は高岡 Ramp と呼ばれている。

<sup>16</sup>X-12ARIMA-SEATS プログラムの詳細や Reg-ARIMA モデリングにおける変数一覧については U.S. Census Bureau (2026) を参照されたい。